TD n°8 : solutions de Leray de l'équation de Navier-Stokes

On s'intéresse ici au système de Navier-Stokes homogène et incompressible :

$$\text{(NS)} \qquad \begin{cases} \partial_t u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p - \Delta u = 0, \quad t>0, x\in\mathbb{R}^N, \\ \operatorname{div} u = 0, \quad t>0, x\in\mathbb{R}^N, \\ u_{|t=0} = u_0, \end{cases}$$

où $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est le champ de vitesse et $p : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ la pression.

Exercice 1 : estimations d'énergie a priori

1. Soient $u \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^N)^N$ avec div $u = 0$, et $p \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} (u\cdot\nabla)u_i u_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} u\cdot\nabla|u_i|^2 = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\cdot\nabla p = 0.$$

2. Soient $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N))^N$ et $p \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N)$. On suppose que pour tout $T>0$, il existe $R_T > 0$ tel que Supp$u(t) \leq B_{R_T}$ pour tout $t\in[0,T]$, et que (u,p) est solution de (NS) au sens classique. Montrer que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

3. En déduire l'estimation d'énergie

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{R}^N))} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{R}^N))} \leq 2\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{1}$$

On dit que u est *faiblement continue à valeurs dans* $L^2(\mathbb{R}^N)$ et on note $u\in\mathcal{C}_w(I, L^2(\mathbb{R}^N))$, si $u\in L^\infty(I, L^2(\mathbb{R}^N))$ et si pour toute fonction $\phi\in\mathcal{C}^1_c(I\times\mathbb{R}^N)$, l'application

$$t\in I \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\phi(t,x)\,dx$$

est continue.

Soient $u\in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N)^N)\cap L^2(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)^N)\cap\mathcal{C}_w(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N)^N)$ telle que div $u=0$, et $u_0\in L^2(\mathbb{R}^N)$ telle que div $u_0 = 0$. On dit que u est une *solution de Leray de* (NS) si pour tout $\varphi\in\mathcal{C}^1_c([0,+\infty[\times\mathbb{R}^N)^N$ telle que div $\varphi = 0$, on a pour tout $t\geq 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(t)\cdot\varphi(t) - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\cdot\varphi(0,x)\,dx$$
$$= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} \big(u(s,x)\partial_s\varphi(s,x) + (u\otimes u(s,x)) : \nabla\varphi(s,x) - \nabla u(s,x) : \nabla\varphi(s,x)\big)\,ds\,dx.$$

Le but de ce TD est la preuve du théorème suivant :

Théorème (Leray, 1933)**.** *On suppose que $N=2$ ou 3. Soit $u_0\in L^2(\mathbb{R}^N)^N$ à divergence nulle. Alors il existe une solution faible $u\in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N)^N)\cap L^2(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)^N)\cap\mathcal{C}_w(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N)^N)$ des équations de Navier-Stokes* (NS)*, qui vérifie de plus l'inégalité d'énergie : pour presque tout $t\geq 0$,*

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{2}$$

Exercice 2 : approximation de Friedrichs
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$E_n = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N), \hat{u}(\xi) = 0 \quad \text{p.p. } |\xi| \geq n\},$$

$$\mathbb{K} := \{u \in L^2(\mathbb{R}^N)^N,\ \text{div } u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)\}.$$

On note $\mathbb{P}_n$ la projection orthogonale sur E_n dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, et Π la projection orthogonale sur $\mathbb{K}$ (projecteur de Leray) dans $L^2(\mathbb{R}^N)^N$.

1. Montrer que pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $\mathbb{P}_n(u) = \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto 1_{|\xi|<n}\hat{u}(\xi)\right)$.

2. Montrer que pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^N)^N$, $\Pi(u) = \mathcal{F}^{-1}\left(M(\xi)\hat{u}(\xi)\right)$, où $M(\xi) = I_N - \xi \otimes \xi/|\xi^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. En déduire que $\mathbb{P}_n \circ \Pi = \Pi \circ \mathbb{P}_n$.

4. Montrer que si $p \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N)$, $\Pi(\nabla p) = 0$.

5. Montrer que si $u \in E_n$, alors $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s \geq 0$, et que $\|u\|_{H^s} \leq (1+n^2)^{s/2}\|u\|_{L^2}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. On définit l'application

$$F : u \in E_n \mapsto -\mathbb{P}_n\Pi(\text{div }(u \otimes u)) + \Delta u.$$

Montrer que $F(E_n) \subset E_n$ et que F_n est une application localement lipschitzienne sur E_n (On pourra utiliser l'injection de Sobolev $\dot{H}^{N/4}(\mathbb{R}^N) \subset L^4(\mathbb{R}^N)$).

7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $u_0 \in \mathbb{K}$, l'équation différentielle

$$\begin{cases} \partial_t u_n = F_n(u_n), \\ u_{n|t=0} = \mathbb{P}_n(u_0), \end{cases}$$

admet une unique solution maximale $u_n \in \mathcal{C}^1([0, T_n[, E_n)$.

8. Montrer que $\Pi(u_n(t)) = u_n(t)$ pour tout $t \in [0, T_n[$, et en déduire que $u_n(t) \in \mathbb{K}$ pour tout t.

9. Montrer que pour tout $t \in [0, T_n[$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u_n(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

10. En déduire que $\sup_{t\in[0,T_n[} \|u(t)\|_{E_n} = \sup_{t\in[0,T_n[} \|u(t)\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2}$, puis que $T_n = +\infty$.

11. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $u_n(t)$ vérifie l'inégalité d'énergie (2).

Exercice 3 : compacité
1. On commence par montrer la régularité en temps.
a) Soit $t, h \geq 0$. Montrer que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n(t+h,x) - u_n(t,x)|^2\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N}\int_t^{t+h} [\nabla u_n(t+h, x - \nabla u_n(t,x))] : \nabla u_n(s,x)\, ds\, dx \\ + \int_{\mathbb{R}^N}\int_t^{t+h} [\nabla u_n(t+h, x - \nabla u_n(t,x))] : (u_n \otimes u_n)(s,x)\, ds\, dx.\end{aligned}$$

b) Montrer que pour tout $T > 0$, pour tout $t \in [0,T]$, pour tout $h \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N}\int_t^{t+h} [\nabla u_n(t+h, x - \nabla u_n(t,x))] : \nabla u_n(s,x)\, ds\, dx\right| \\ &\qquad \leq 2\sqrt{T+1}\, h^{1/2} \int_0^{T+1} \|\nabla u_n(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} ds \leq \sqrt{T+1}\, h^{1/2}\|u_0\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

c) Montrer que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_t^{t+h} [\nabla u_n(t+h, x-\nabla u_n(t,x))] : (u_n \otimes u_n)(s,x)\, ds\, dx\right| \\
&\qquad\qquad \leq \int_0^T \int_t^{t+h} \|u_n(s)\|_{L^4}^2 \left(\|\nabla u_n(t+h)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u_n(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)\, ds\, dt \\
&\qquad\qquad \leq C_T h^{1-\frac{N}{4}} \|u_0\|_{L^2}^3,
\end{aligned}$$

pour une certaine constante C_T ne dépendant que de T (que l'on ne cherchera pas à expliciter). On pourra utiliser l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg : il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{1-\frac{N}{4}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{N/4}.$$

d) En déduire que pour tout $T > 0$, il existe $C_T > 0$ tel que pour tout $h \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^T \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 dt \leq C_T h^{1-\frac{N}{4}}.$$

2. a) Montrer en utilisant la question précédente qu'il existe $s_0 > 0$ tel que si $s < s_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{1}_{|t-t'|\leq 1} \frac{|u_n(t,x) - u_n(t',x)}{|t-t'|^{1+2s}} \leq C_{T,s}$$

En déduire que

$$\int_0^T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n(t,x) - u_n(t',x)}{|t-t'|^{1+2s}} \leq C_{T,s}.$$

b) Montrer que si $0 < s < 1$,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n(t,x) - u_n(t,y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx\ dy\ dt \leq C_T$$

On pourra utiliser la propriété suivante : pour tout $s \in]0,1[$, il existe une constante C_s telle que si $v \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^N)$,

$$\|v\|_{\dot{H}^s}^2 = C_s \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx\ dy.$$

c) Montrer qu'il existe une constante $C_s > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
&\forall (t,t',x) \in [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^N, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(|t-t'| + |x-y|)^{1+N+2s}} dy \leq \frac{C_s}{|t-t'|^{1+2s}}, \\
&\forall (t',x,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \quad \int_0^T \frac{1}{(|t-t'| + |x-y|)^{1+N+2s}} dt \leq \frac{C_s}{|x-y|^{N+2s}}.
\end{aligned}$$

d) En déduire qu'il existe $s \in]0,1[$ et $C_{s,T} > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{\dot{H}^s((0,T)\times\mathbb{R}^N)} &= \int_0^T \int_0^T \int_{R^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n(t,x) - u_n(t',y)|^2}{(|t-t'| + |x-y|)^{1+N+2s}}\, dx\, dy\, dt\, dt' \\
&\leq C_{s,T}.
\end{aligned}$$

3. Continuité faible en temps :
a) Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$. On pose

$$I_n(t) = \int_{\mathbb{R}^N} u_n(t,x)\varphi(t,x) dx.$$

Justifier que $I_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ et qu'il existe $T > 0$ tel que Supp $I_n \subset [0, T]$ pour tout n. b) Montrer que

$$\begin{aligned} I_n(t) &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{P}_n(u_0)\varphi(t=0) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} u_n(t,x)\partial_t\varphi(t,x)\,dx\,dt \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (u_n \otimes u_n)(s,x) : \nabla \mathbb{P}_n \Pi \varphi(s,x)\,dx\,ds \\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(s,x) : \nabla \varphi(s,x)\,dx\,ds. \end{aligned}$$

c) En observant que $\|\nabla \mathbb{P}_n \Pi \varphi(t)\|_{L^2} \leq \|\nabla \varphi(t)\|_{L^2}$ pour tout t et en utilisant les mêmes types de majorations qu'aux questions précédentes, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de φ, de N et de u_0, telle que pour tout $t, t' \geq 0$,

$$|I_n(t) - I_n(t')| \leq C \left(|t - t'|^{1-\frac{N}{4}} + |t - t'| \right).$$

Exercice 4 : passage à la limite

1. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N))^N \cap L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^N))$ telle que $u \in H^s((0,T) \times \mathbb{R}^N)$ pour tout $T > 0$ et pour un certain $s \in]0,1[$, et telle que lorsque $k \to \infty$,

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{dans } H^s((0,T) \times \mathbb{R}^N) \quad \text{pour tout T>0},$$

$$\begin{gathered} u_{n_k} \to u \quad \text{dans } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N), \\ u_{n_k} \rightharpoonup^* u \quad \text{dans } w^* - L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N)), \\ u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^N). \end{gathered}$$

2. Montrer que, quitte à ré-extraire une sous-suite, il existe $I \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+)$ telle que

$$I_{n_k} \to I \qquad \text{dans } \mathcal{C}(\mathbb{R}_+).$$

3. Montrer que
$$I(t) = \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\varphi(t,x)\,dx \quad \forall t \geq 0.$$
En déduire que $u \in \mathcal{C}_w(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N))$.
4. Justifier que div $u = 0$.
5. Soit $\phi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)^N$ à divergence nulle. Montrer que pour tout $p \in [1, +\infty[$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \|\nabla \mathbb{P}_n \phi(t) - \nabla \phi(t)\|^p_{L^2(\mathbb{R}^N)} dt = 0$$

(On pourra utiliser l'égalité de Parseval et le théorème de convergence dominée.)
6. En déduire que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} (u_n \otimes u_n) : (\nabla \mathbb{P}_n \phi - \nabla \phi) = 0,$$
puis que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{P}_n \Pi(\text{div } (u_n \otimes u_n)) \cdot \phi = -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u \otimes u : \nabla \phi.$$

7. Montrer que u est une solution de Leray de (NS). Conclure.